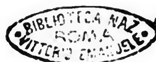
# MEMOIRE
## SUR
# LE CALCUL INTEGRAL




PAR

LE P. THOMAS LE SEUR

PROFESSEUR DE MATHEMATIQUE DANS L'UNIVERSITE' DE LA SAPIENCE.



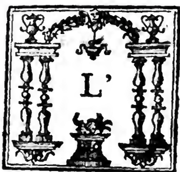
A ROME M. DCC. XLVIII.

CHEZ LES FRERES NICOLAS, ET MARC PAGLIARINI MARCHANDS LIBRAIRES.

*AVEC PERMISSION DES SUPERIEURS.*

# A MONSIEUR L'ABBÉ
# BASTIANI.

MONSIEUR



L'ESTIME générale que vous vous étes acquise dans cette cour, est le fruit d'une conduite judicieuse & polie; de l'esprit fait tout cela. J'ay un mot à vous dire sur toute autre chose : Je suis devenu votre ami très particulier; ici c'est le coeur qui a operé : vótre gout pour

les

les Mathématiques a ébauché notre liaiſon ; je n'ay pas été bien du tems a voir en vous un caractére noble deſintereſsé, modeſte franc, humain & tendre, & j'en ay été ſi touché que je vous ſerai attaché pour toûjours : Je me fais un vif plaiſir de l'apprendre aux honétes Gens qui liront ce memoire que je vous preſente.

A Rome ce 17 Octobre 1748.

*Thomas Le Seur.*

ME-



# MEMOIRE
## SUR
# LE CALCUL INTEGRAL.



*DE la manière d' integrer par la quadrature des sections coniques la differentielle* $\frac{pdx}{q}$, *dans la quelle* p *&* q *expriment des polynomes quelconques, comme* $a + bx^m + cx^n +$ *&c, ou les produits de ces polynomes multipliès ensemble, ou même leurs puissances; pourvù neanmoins que les exposans* m, n, *&c. de la variable* x *soient des nombres rationels; que les constantes* a, b, c, *&c. soient rèelles, & que les exposans des puissances, aux quelles ces polynomes sont elevès, soient des nombres entiers.*

I. Il est evident, que la differentielle $\frac{pdx}{q}$ est egale a une fraction, ou a la somme de plusieurs fractions, dont le denominateur commun est $q$, & les numerateurs sont des produits des puissances de $x$ multipliées par $dx$ & par des quantités constantes. Car soit par exemple $p = (a + bx^{\frac{3}{2}})^2$; en faisant le quarré de $a + bx^{\frac{3}{2}}$, on aura $\frac{pdx}{q} = \frac{a^2dx}{q} + \frac{2abx^{\frac{3}{2}}dx}{q} + \frac{b^2x^3dx}{q}$.

II. Donc si l'on peut integrer, de quelque maniere que ce soit, la fraction $\frac{x^m dx}{q}$, dans la quelle l'exposant $m$ est un nombre rationel quelconque, ou zero; on pourra aussi trouver de la même maniére l'integrale de la differentielle proposée $\frac{pdx}{q}$: car l'integrale S. $\frac{pdx}{q}$ dans l'exemple proposé est $= a^2$ S. $\frac{dx}{q} + 2ab$ S. $\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{q} + b^2$ S. $\frac{x^3 dx}{q}$; les constantes, par les quelles le numerateur $x^m dx$ peut être multiplié ou divisé, ne faisant point de difficulté dans l'integration.

III. Si les exposans de $x$ dans la differentielle $\frac{x^m dx}{q}$ ne sont pas tous des nombres entiers, on pourra toûjours changer cette differentielle en une autre, qui lui sera egale, & dans la quelle les exposans de la variable seront tous des nombres entiers. Car soit proposée la differentielle $\frac{x^{\frac{n}{r}} dx}{\left(a + bx^{\frac{s}{t}}\right)^{\delta}}$. On n'a qu'a prendre le plus petit nombre entier $\lambda$, qui puisse être exactement divisé par les nombres $r$ & $t$, & ayant fait $x = z^{\lambda}$, & substitué $z^{\lambda}$ au lieu de $x$ dans la differentielle proposée, on la changera en celle ci $\frac{\lambda z^{\frac{\lambda n + \lambda - r}{r}} dz}{\left(a + bz^{\frac{\lambda s}{r}}\right)^{\delta}}$ dans la quelle tous les exposans de la variable $z$ sont des nombres entiers.

On

On peut reduire de la même maniére toute autre differentielle.

$$\frac{x^{\frac{m}{n}}\,dx}{\left(a+bx^{\frac{r}{s}}+cx^{\frac{t}{u}}+\&c.\right)^{\delta}\times\left(f+gx^{\frac{\mu}{\nu}}+bx^{\frac{\sigma}{\tau}}+\&c.\right)^{\epsilon}\times\&c.}$$

Car en prenant le plus petit nombre entier $\lambda$, qui puiſſe être exactement meſuré par $n$, $s$, $u$, $\nu$, $\tau$, &c., & en ſubſtituant $z^{\lambda}$ aulieu de $x$, on aura la fraction

$$\frac{\lambda z^{\frac{\lambda m}{n}+\lambda-1}\,dz}{\left(a+bz^{\frac{\lambda r}{s}}+cz^{\frac{\lambda t}{u}}+\&c.\right)^{\delta}\times\left(f+gz^{\frac{\lambda\mu}{\nu}}+bz^{\frac{\lambda\pi}{\tau}}+\&c.\right)^{\epsilon}\times\&c.}$$

Dans la quelle tous les expoſans de la variable ſont des nombres entiers.

IV. Si la variable $x$ dans la fraction $\frac{x^{m}\,dx}{q}$ a des expoſans negatifs, on pourra toûjours changer cette fraction en une autre egale, dans la quelle la variable n'aura que des expoſans poſitifs. On n'a pour cela qu'a multiplier le numerateur & le denominateur de la fraction par une puiſſance de $x$, dont l' expoſant ſoit poſitif & egal au plus grand expoſant negatif dela même variable $x$; ce qui ne change rien dans la valeur de la fraction. Soit propoſée la fraction

$$\frac{x^{m}\,dx}{\left(a+bx^{-n}+\&c.\right)^{\delta}\times\left(e+fx^{-r}+\&c.\right)^{\epsilon}\times\&c.}$$

Et que $-n$ ſoit le plus grand expoſant negatif dans le polynome $a+bx^{-n}+\&c.$, & $-r$ le plus grand expoſant negatif

tif dans le polynome $e + fx^{-r} +$ &c. ; & ainſi des autres : d'ou il ſuit que le plus grand expoſant negatif de $x$ dans le denominateur de cette fraction eſt $-\delta n - \varepsilon r -$ &c. Multipliant donc le numerateur & le denominateur par $x^{\delta n + \varepsilon r + \&c.}$ on aura la fraction

$$\frac{x^{m + \delta n + \varepsilon r + \&c.}\, dx}{(ax^n + b + \&c.)^\delta \times (ex^r + f + \&c.)^\varepsilon \times \&c.}$$

egale a la propoſée & telle que tous les expoſans de $x$ dans le denominateur ſont poſitifs. L'expoſant $m + \delta n + \varepsilon r$ + &c. de $x$ dans le numerateur ſera auſſi poſitif, ſi $m$ eſt un nombre poſitif, ou ſi $m$ etant negatif, $\delta n + \varepsilon r$ + &c. eſt plus grand que $m$. Mais ſi $m$ eſt negatif & plus grand que $\delta n + \varepsilon r$ + &c. en ſorte que $m + \delta n + \varepsilon r$ + &c. ſoit un nombre negatif, comme $-s$ ; on n'a qu'a multiplier le numerateur & le denominateur de la fraction par $x^s$ pour rendre tous les expoſans de $x$ poſitifs.

On peut encore rendre poſitif l'expoſant du numerateur dans la fraction

$$\frac{x^{-s}\, dx}{(ax^n + b + \&c.)^\delta \times (ex^r + f + \&c.)^\varepsilon \times \&c.}$$

ſans multiplier le numerateur & le denominateur par $x^s$. Car ſi l'on fait $x = z^{-1}$, & qu'on ſubſtituë par tout $z^{-1}$ au-lieu de $x$, & $-z^{-2}dx$ au lieu de $dx$, la fraction ſera changée en celle ci

$$\frac{-z^{s-2}\, dz}{(az^{-n} + b + \&c.)^\delta \times (ez^{-r} + f + \&c.)^\varepsilon \times \&c.}$$

dans

dans la quelle on rendra tous les expoſans poſitifs, en multipliant le numerateur & le denominateur par $z^{\delta n + \varepsilon r + \&c.}$ Il faut excepter le cas de $s = 1$, lorſque le denominateur $q$ eſt conſtant; car pour lors la fraction devient $\frac{-z^{-1} dz}{q}$, dont l'integrale ſe trouve par la quadrature de l'hyperbole.

V. On peut toûjours reduire la fraction $\frac{x^m dx}{q}$ de telle ſorte, que la plus haute puiſſance de la variable $x$ dans chacun des polynomes, dont le denominateur $q$ eſt compoſé, ne ſoit multipliée que par $+1$. Car ſoit $q = (a + bx^n + \&c.)^\delta \times (e + fx^r + \&c.)^\varepsilon \times \&c.$; & que $n$ ſoit l'expoſant de la plus haute puiſſance de $x$ dans le premier polynome $a + bx^n + \&c.$, $r$ l'expoſant de la plus haute puiſſance de $x$ dans le ſecond polynome $e + fx^r + \&c.$; & ainſi du reſte. Qu'on diviſe le premier polynome par $+b$, le ſecond par $+f$, &c. & le numerateur par $b^\delta f^\varepsilon$ &c. la fraction propoſée deviendra

$$\frac{\frac{1}{b^\delta f^\varepsilon \&c.} x^m dx}{\left(\frac{a}{b} + x^n + \&c.\right)^\delta \times \left(\frac{e}{f} + x^r + \&c.\right)^\varepsilon \times \&c.}$$

qui a la condition requiſe.

VI. On voit par tout ce qui vient d'etre êtabli, que l'integration de la differentielle propoſée ſe reduit a celle de la fraction

$$\frac{x^m dx}{\left(x^n + a x^r \ldots\ldots + c\right)^\delta \times \left(x^s + e x^t \ldots\ldots + j\right)^\varepsilon \times \&c.}$$

dans

dans la quelle tous les exposans $m$, $n$, $r$, $s$, $t$, $\delta$, $\epsilon$, &c. sont des nombres entiers positifs, ou zero, & la plus haute puissance de la variable $x$ dans chaque polynome du denominateur n'est multipliée que par $+1$. Et si l'on eleve actuellement les polynomes du denominateur a leurs puissances respectives, dont les exposans sont $\delta$, $\epsilon$, &c., & qu'on les multiplie ensemble, cetre derniere fraction acquerera cette forme

$$\frac{x^m dx}{x^\mu + ax^\nu + bx^\pi \ldots\ldots + g}$$

dans la quelle tous les exposans $m$, $\mu$, $\nu$, $\pi$, &c. sont des nombres entiers positifs.

VII. Je designe par $R$ ce denominateur, en sorte que la fraction dont on cherche l'integrale, soit $\frac{x^m dx}{R}$. Et si $R$ est une quantité constante, ou une puissance quelconque de la variable $x$; on sçait assez, que cette fraction pourra toûjours être integrée ou algebraïquement, ou par la quadrature de l'hyperbole. Il ne nout reste donc qu'a chercher l'integrale de cette fraction dans les autres cas, ou $R$ n'est ni une quantité constante, ni une puissance seule de $x$. Mais pour entrer dans cette recherche, j'ay besoin des definitions suivantes.

J'appelle binome la quantité $x^n + a$, dans la quelle $a$ est constante & réelle, positive ou negative; & l'exposant $n$ de la variable $x$, est un nombre entier positif.

Le Trinome est une quantité $x^{2n} + ax^n + b$, dans la quelle $a$ & $b$ sont constantes & réelles, positives ou negatives, $n$ un nombre entier positif, & les exposans $2n$, $n$, $0$, dans les trois termes sont en proportion arithmetique continuë.

Le Quadrinome est une quantité $x^{3n} + ax^{2n} + bx^n + c$, dant la quelle $a$, $b$, $c$, sont constantes & réelles, $n$ un nombre

bre entier positif, & les exposans $3n$, $2n$, $n$, $o$, en progression arithmetique continue ; de sorte neanmoins, que l'un des deux termes du milieu, $ax^{2n}$, ou $bx^{n}$ peut manquer, en faisant $a$, ou $b = o$. C'est pourquoy les quantité $x^{3n} + bx^{n} + c$, & $x^{3n} + ax^{2n} + c$ sont des quadrinomes.

Le Quinquinome, ou quintinome, est une quantités $x^{4n} + ax^{3n} + bx^{2n} + cx^{n} + e$ dans la quelle $a, b, c, e$, sont constantes & réelles, $n$ un nombre entier positif, & les exposans $4n$, $3n$, $2n$, $n$, $o$ en progression arithmetique continue ; de sorte neanmoins que des trois quantités $a$, $b$, $c$, une quelconque, ou même deux, sçavoir $c$, & $b$, ou $a$ & $b$, peuvent manquer, mais non pas $a$ & $c$ : car $x^{4n} + bx^{2n} + e$ est un trinome.

On voit par ces definitions, ce que c'est qu'un sextinome, un septinome, un octinome, &c., ou en general un polynome de six, sept, huit, neuf &c. noms, ou termes.

VIII. Messieurs Leibnitz & Jean Bernoulli ont demontré dans les actes de Leipsik de 1702 & 1703, & dans les memoires de l'Academie des Sciences de Paris 1702, qu'en supposant la quadrature de l'hyperbole on peut toûjours integrer la fraction $\frac{x^m dx}{R}$, lorsque le denominateur $R$ n'est autre chose que le produit des binomes simples $x + a$, $x + b$, &c. Et il n'est point difficile, en suivant les idées que ces deux grands mathematiciens nous ont données, & en supposant les quadratures du cercle & de l'hyperbole, de trouver l'integrale de la même fraction, lorsque le denominateur $R$ peut etre resolu en binomes d'une ou de deux dimensions, comme $x^2 + ax + b$, $x^2 + c$, $x + e$, &c.

IX. Car que le plus grand exposant de $x$ dans le denominateur

minateur $R$ ſoit $n$ ; & ſi l' expoſant $m$ eſt egal a $n$, ou plus grand que $n$, qu' on diviſe $x^m$ par $R$ autant preciſement qu' il eſt neceſſaire pour que l' expoſant $n$ ſoit plus grand que l' expoſant de $x$ dant ce qui reſte de la diviſion ; & qu' on prenne l' integrale du quotient de cette diviſion ; ce qui pourra toûjours ſe faire. Il ne reſtera plus qu' a trouver l' integrale d' une fraction, comme $\frac{x^s\,dx}{R}$, dans la quelle l'expoſant $s$ ſera moindre que $n$.

X. Or ſi le denominateur $R$ de cette fraction peut ſe reſoudre en binomes ou trinomes tous inegaux d' une ou de deux dimenſions, comme $x + a$, $x + b$, $x^2 + c$, $x^2 + ex + f$, $x^2 + gx + h$, &c. ; qu' on ſuppoſe $\frac{x^s}{R}$ egale a la ſomme des fractions $\frac{A}{x + a} + \frac{B}{x + b} +$ &c. $+ \frac{Dx + E}{x^2 + c} + \frac{Fx + G}{x^2 + ex + f} + \frac{Hx + x}{x^2 + gx + h} +$ &c., c' eſt a dire, egale a la ſomme d' autant de fractions, qu' il ya de binomes & de trinomes compoſans le denominateur $R$. Qu' on reduiſe enſuite toutes ces fractions au denominateur commun $R$, & les ayant ajoutées enſemble, qu' on egale a zero chaque terme de cette ſomme, ou la puiſſance $x^s$ ne ſe trouve point, & le terme ou elle ſe trouve, a la même puiſſance $x^s$ ; ce qui donnera autant d'equations, qu' il y a de conſtantes $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, &c., par les quelles on determinera les valeurs de ces conſtantes. Et alors la fraction $\frac{x^3\,dx}{R}$ ainſi reduite ſe pourra toûjours integrer par les quadratures du cercle & de l' hyperbole, comme on le ſcait aſſés. Mais ſi dans

dans la determination des valeurs de $A$, $B$, $C$, $D$, &c. on trouve quelque contradiction ce sera une marque que les facteurs de $R$, qu'on a supposés tous inegaux, ne le sont pas; & pour lors on se servira de la maniere que nous allons expliquer.

XI. Si le denominateur $R$ peut se resoudre en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimensions, en partie egaux, & en partie inegaux entr'eux, ou en leurs puissances dont les exposans soient des nombres entiers, comme si $R = S T^{\lambda} V^{\mu}$ &c., & que $S$, $T$, $V$, &c. Soient des binomes ou trinomes d'une ou de deux dimensions, & $\lambda$, $\mu$, &c. des nombres entiers positifs; on supposera $R = \frac{L}{S} + \frac{M}{T^{\lambda}} + \frac{N}{V^{\mu}}$ + &c., & on exprimera les quantités $L$, $M$, $N$, &c. par les constantes indeterminées $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, &c. & par la variable $x$ de telle sorte, que si $S = x + a$, $L$ soit exprimée par $A$; si $S = x^2 + a$, ou $= x^2 + ax + b$, $L$ soit exprimée par $Ax + B$; si $T^{\lambda} = (x^2 + cx + e)^2$, ou $= (x^2 + c)^2$, $M$ soit exprimée par $Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$; si $T^{\lambda} = (x^2 + cx + e)^3$, ou $= (x^2 + c)^3$, $M$ soit exprimée par $Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H$; & ainsi du reste. On reduira ensuite les fractions $\frac{S}{L} + \frac{M}{T^{\lambda}} + \frac{N}{V^{\mu}}$ + &c. au commun denominateur $R$, & en ayant fait la somme, on la supposera egale a $\frac{x^s}{R}$, en egalant a zero chacun des termes ou la puissance $x^s$ ne se trouve point, & le terme, dans le quel elle se trouve, à $x^s$; ce qui donnera autant d'equations qu'il ya de constantes $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, &c. à determiner.

 Exem-

Exemple. Soit $\frac{x^{s}}{R} = \frac{1}{R} = \frac{1}{(x + a) \times (x^2 + bx + c)}$

$$= \frac{A}{x + a} + \frac{Bx + C}{x^2 + bx + c} = \frac{\begin{matrix} + Ax^2 + bAx + cA \\ + Bx^2 + aBx + aC \\ + Cx \end{matrix}}{R}$$

ou aura les trois equations $A + B = o$, $bA + aB + C = o$, & $cA + aC = 1$. par les quelles on trouve $A = \frac{1}{aa + c - ab}$, $B = \frac{-1}{aa + c - ab}$, & $C = \frac{a - b}{aa + c - ab}$.

Si $aa + c - ab = o$, on auroit $x^2 + bx + c = (x + a) \times (x + b - a)$, & par confequent $R = \frac{1}{(x+a)^2 \times (x + b - a)}$.

C' eft pourquoy il fraudroit fuppofer $\frac{1}{R} = \frac{A}{x + b - a} + \frac{Bx + C}{(x + a)^2} = \frac{\begin{matrix} + Ax^2 + 2aAx + a^2A \\ + B \quad + bB \quad + bC \\ - aB \quad - aC \\ + C \end{matrix}}{R}$

D' ou l' on tireroit les equations $A + B = o$, $2aA + bB - aB + C = o$, & $a^2A + bC - aC = 1$, Les queilles donnent $A = \frac{1}{(2a - b)^2}$. $B = \frac{-1}{(2a - b)^2}$. & $C = \frac{b - 3a}{(2a - b)^2}$.

Si dans ce dernier cas on avoit encore $2a - b = o$, $x + b - a$ feroit $= x + a$, & $R = (x + a)^3$.

XII. Il

XII. Il suit de ce que nous venons de dire, que pour trouver l' integrale de la fraction $\frac{x^s dx}{S T^\lambda V^\mu \&c.}$, c'est assez d' integrer les fractions $\frac{x^s dx}{(x+a)^\delta}$, $\frac{x^s dx}{(x^2+a)^\delta}$, & $\frac{x^s dx}{(x^2+ax+b)^\delta}$, dans les quelles les exposans $s$ & $\delta$ sont des nombres entiers positifs quelconques, ou zero, & $a$ & $b$ des quantités constantes, réelles, positives ou negatives.

Or en faisant $x+a=z$, la fraction $\frac{x^s dx}{(x+a)^\delta}$, se change en celle-ci $\frac{(z-a)^s dz}{z^\delta}$, qu' on peut toûjours integrer en supposant la quadrature de l' hyperbole.

L' integration de $\frac{x^s dx}{(x^2+a)^\delta}$ depend de l' integration de $\frac{x^s dx}{x^2+a}$, comme Mr. Newton la demontré dans son traité de la quadrature des courbes prop. 7. Et l' integrale de $\frac{x^s dx}{x^2+a}$ se peut toûjours trouver, en supposant les quadratures du cercle & de l' hyperbole.

Enfin si l'on fait $x=z-\frac{1}{2}a$, la fraction $\frac{x^s dx}{[x^2+ax+b]^\delta}$ se change en celle-ci $\frac{[z-\frac{1}{2}a]^s dx}{[zz-\frac{1}{4}aa+b]^\delta}$, qu' on pourra integrer comme la precedente $\frac{x^s dx}{[x^2+a]^\delta}$.

Donc, les quadratures du cercle & de l' hyperbole etant données, ou pourra toûjours trouver l' integrale de la differentielle $\frac{x^s\,dx}{S\,T^\lambda\,V^\mu \&c.}$.

XIII. Donc, les quadratures du cercle & de l' hyperbole etant données, on trouvera l' integrale de la differentielle $\frac{p\,dx}{q}$ proposée au commencement de ce memoire, pourvû qu' on puisse resoudre le polynome quelconque $a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n} + \&c.$ en binomes ou trinomes d' une ou de deux dimensions. Car par cette resolution la differentielle $\frac{x^s\,dx}{R}$, d' ou depend l' integration de la proposée $\frac{p\,dx}{q}$ (6. 7.), aura la forme de la fraction $\frac{x^s\,dx}{S\,T^\lambda\,V^\mu \&c.}$

XIV. Or le celebre Mr. Gabriel Manfredi a donné dans les journaux de Venise, & dans le premier tome des Commentaires de l'Academie de l' Institut de Boulogne une methode generale pour resoudre le binome quelconque $x^n + b$ en binomes ou trinomes d' une ou de deux dimensions. Il à aussi donné dans les mêmes ouvrages la methode pour resoudre le trinome $x^{2n} + max^n + a^{2n}$, dans le quel $ma$ est une quantité quelconque constante & réelle, $a^{2n}$ une quantité aussi quelconque constante, réelle & positive. D' ou il suit que le trinome quelconque $x^{2n} + bx^n + c$ peut toûjours être resolu en binomes & trinomes d'une ou de deux dimensions. Car si l' on fait $b = ma$, & $c = a^{2n}$; ce qui est toûjours possible, quand $c$ est une quantité positive; le trinome proposé aura la même forme que celui de Mr. Manfredi. Et si

Et si $c$ est une quantité negative, en sorte que le trinome soit $x^{2n} + bx^{n} - c$; on le resoudra d'abord en deux binomes $x^{n} \frac{+ b + \sqrt{bb + 4c}}{2}$, & $x^{n} \frac{+ b - \sqrt{bb + 4c}}{2}$, qu'on divisera ensuite en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimensions.

Messieurs Jean Bernoulli & Jacques Herman ont aussi tres ingenieusement travaillé sur la resolution des trinomes & des quadrinomes dans les actes de Leipsik de 1719. & dans le VI. Tome des Commentaires de l'Academie de Petesbourg, a l'occasion d'une probleme proposé par Mr. Taylor a tous les geometres non Anglois; probleme qu'ils resolurent l'un & l'autre. On trouve encore la resolution generale des binomes, des trinomes, & des quadrinomes, avec beaucoup de beaux theoremes sur toute cette matiere, dans un ouvrage de Mr. de Moivre imprimé a Londres en 1730. sous le titre de *Miscellanea analytica de seriebus & quadraturis*. Il y demontre entr'autres choses le fameux theorême, que Mr. Roger Cotes avoit donné sans demonstration dans son excellent ouvrage *de harmonia mensurarum* imprimé en 1722., pour trouver les facteurs du binome general par la division du cercle en parties egales.

XV. Les binomes, trinomes, & quadrinomes quelconques peuvent etre resolus en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimensions. On peut voire la demonstration de cette proposition, quant aux binomes & trinomes, dans les auteurs que je viens de citer. Celle de la resolution du quadrinome est fort aisée, la voici. Soit le quadrinome quelconque $x^{3n} + ax^{2n} + bx^{n} + c$. Qu'on fasse $x^{n} = z$; & qu'ensuite, ayant substitué $z$ aulieu de $x^{n}$, on considere le quadrinome $z^{3} + az^{2} + bz + c$ comme egal a zero. On aura par

par la une equation du troisieme degré $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, qui aura toûjours au moins une racine réelle $z + e$, ou $x^n + e$, qu'on pourra trouver par le calcul, ou par construction geometrique, & par la quelle on pourra diviser exactement l'equation, ou le quadrinome proposé, & le resoudre ainsi en un trinome & un binome. Puis donc que tout binome, & tout trinome peut être resolu en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimensions; tout quadrinome pourra aussi etre semblablement divisé.

XVI. Tout quinquinome peut être divisé en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimensions. Car soit le quinquinome quelconque $x^{4n} + ax^{3n} + bx^{2n} + cx^n + e$. Qu'on le change en une equation du quatrieme degré, en faisant $x^n = z$, & cette equation $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + e = 0$ aura ses quatre racines réelles, ou deux seulement, ou elles seront toutes imaginaires. Si elle a des racines réelles, ou pourra toûjours les trouver par analyse ou par construction geometrique, & diviser l'equation par ces racines ou par leur produit, & la resoudre ainsi en binomes ou trinomes, dans les quels on remétra $x^n$ au lieu de $z$; en suite ces binomes & trinomes pourront etre resolus en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimensions [15].

Si l'equation $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + e = 0$ n'a point de racines réelles; qu'on en ôte le second terme par la methode ordinaire, en faisant $z = y - \frac{1}{4}a$, & qu'on la reduise par la à une equation de cette forme.

$$y^4 + gy^2 + hy + k = 0.$$

Qu'en suite on egale chaque terme de cette derniere equation a chaque terme correspondant de celleci.

$$y^4 \begin{matrix} + ppqy^2 \\ + 2r \end{matrix} + 2pqy \begin{matrix} + rr \\ + q \end{matrix} = 0.$$

for-

formée I.° par la multiplication des deux trinomes

$$y^2 + yp\sqrt{-q} + r + \sqrt{-q}$$
$$y^2 - yp\sqrt{-q} + r - \sqrt{-q}$$

& aussi II.° par la multiplication des deux trinomes suivans

$$y^2 + my + \frac{1}{3}ppq + r - \frac{pq}{m} + \frac{1}{2}mm$$
$$y^2 - my + \frac{1}{2}ppq + r + \frac{pq}{m} + \frac{1}{2}mm$$

dans les quels $m = \sqrt{-\frac{1}{2}ppq - 2r + \sqrt{4q + (\frac{1}{2}p^2q + 2r)^2}}$
Et l'on aura trois equations, sçavoir $g = p^2q + 2r$, $h = 2pq$. Et $k = rr + q$, par les quelles on trouve $q = k - rr$, $p = \frac{h}{2k - 2rr}$, & $8r^3 - 4gr^2 - 8kr + 4kg - hh = o$.
Cette derniere equation etant du troisieme degré donnera aumoins une valeur réelle de $r$, positive ou negative ; & par consequent on trouvera aussi des valeurs réelles de $q$ & $p$ par les equations $q = k - rr$, & $p = \frac{h}{2k - 2rr}$. S'il arrivoit que $rr$ fut $= k$, & par consequent $q = o$, $h = o$, & $g = 2r$ ; l'equation $y^4 + gy^2 + hy + k = o$ deviendroit $y^4 + 2ry^2 + rr\ o$, qui est le quarré du binome $y^2 + r$.

Ayant trouvé les valeurs réelles de $p, q, r$, il faut les substituer dans les deux trinomes, dont le produit est $y^4 + ppqy^2 +$ &c., en faisant attention que si $q$ est une
$+ 2r$
quantité negative, on doit se servir des deux premiers trinomes ; & si $q$ est positive, ou doit se servir des deux derniers trinomes, dans les quels pour lors la quantité $m$ sera toûjours réelle, & par consequent les autres constantes seront aussi réelles. Si

Si apres ces operations on remét dans les deux trinomes, dont on ſe ſera ſervi, $z + \frac{1}{4} a$ aulieu de $y$, & $x^n$ aulieu de $z$, on aura deux trinomes facteurs du quinquinome propoſé ; & ces trinomes ſe pourront enſuite reſoudre en leurs binomes ou trinomes d' une ou de deux dimenſions [ 15.] Donc &c.

Exemple. Soit propoſé le quinquinome $x^{4n} + 3x^{2n} + 2x^n + 2$, ou, ayant fait $x^n = y$, l' equation $y^4 + 3y^2 + 2y + 2 = 0$.

En comparant termes a termes cette equation avec la formule generale $y^4 + gy^2 + hy + k = 0$, on trouve $g = 3$, $h = 2$, $k = 2$, & $8r^3 - 12r^2 - 16r + 20 = 0$ ; d'ou l'on tire $r = 1$, ou $r - 1 = 0$ ; & en diviſant cette equation par $r - 1$, on à pour quotient $8r^2 - 4r - 20 = 0$, qui donne $r = \frac{1 + \sqrt{41}}{4}$, & $r = \frac{1 - \sqrt{41}}{4}$.

Si l'on veut ſe ſervir de la premiere valeur de $r = 1$, on trouvera $q = k - rr = 1$, & $p = 1$, & par ceque $q$ eſt un nombre poſitif, il faut employer les deux derniers trinomes, qui par la ſubſtitution de $x^n$ au lieu de $y$, & des valeurs de $r$, $q$, $p$, ſe changent en ceux-ci

$$x^{2n} + \frac{x^n\sqrt{-10 + 2\sqrt{41}}}{2} + \frac{1 + \sqrt{41}}{4} \frac{-2}{\sqrt{-10 + 2\sqrt{41}}}$$

$$x^{2n} - \frac{x^n\sqrt{-10 + 2\sqrt{41}}}{2} + \frac{1 + \sqrt{41}}{4} \frac{+2}{\sqrt{-10 + 2\sqrt{41}}}$$

Si on prend la ſeconde valeur de $r = \frac{1 + \sqrt{41}}{4}$ on trou-

vera

vera $q = \frac{-10 - 2\sqrt{41}}{16}$, $\sqrt{-q} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{41}}}{2}$, &

$p = \frac{-16}{10 + 2\sqrt{41}}$; & en ſubſtituant ces valeurs dans les premiers trinomes, a cauſe de $q$ negatif, on aura ceux-ci

$$x^{2n} \frac{-4x^n}{\sqrt{10 + 2\sqrt{41}}} + \frac{1 + \sqrt{41} + \sqrt{10 + 2\sqrt{41}}}{4}$$

$$x^{2n} \frac{+4x^n}{\sqrt{10 + 2\sqrt{41}}} + \frac{1 + \sqrt{41} - \sqrt{10 + 2\sqrt{41}}}{4}$$

qui conviennent avec ceux qu'on a deja trouvés par la premiere valeur de $r = 1$. On pourroit auſſi ſe ſervir de la troiſieme valeur de $r = \frac{1 - \sqrt{41}}{4}$.

On trouve dans la III. partie du II. Tome des Commentaires de l'Accademie de l'inſtitut de Boulogne un autre methode generale pour reſoudre les equations du quatrieme degré en trinomes de deux dimenſions. Mr. Gabriel Manfredi, autheur de cette methode, m'en avertit, l'orſque je lui communiquay ce memoire manuſcrit pour le prier de l'examiner & de m'en dire ſon ſentiment; il eut de plus la bonté de m'envoyer cette troiſieme partie, que je n'avois par encore vuë. Sa methode eſt fort ingenieuſe, mais bien differente de celle que je viens de donner pour reſoudre les quinquinomes. Il l'applique a cette equation

$$x^4 + 4ax^3 + 7a^2x^2 + \frac{15a^4}{4} = 0$$

qu'on reſout d'une maniere fort courte par la mienne. Car ayant fait $x = y - a$, l'equation propoſée ſe change en celle-ci

$$y^4 + aayy - 6a^3y + \frac{31}{4}a^4 = 0$$

 la

la quelle etant comparée termes a termes avec la formule generale $y^4 + gy^2 + hy + k = o$, fournit ces quatre equations $g = aa$, $h = -6a^3$, $k = \frac{31}{4}a^4$, & $8r^3 - 4a^2r^2 - 62a^4r - 5a^6 = o$. Cette derniere equation eſt diviſible par $2r + 5aa = o$, & le quotient eſt $4rr - 12a^2r - a^4 = o$. D'ou l'on tire $r = \frac{-5aa}{2}$, & $r = \frac{3a^2 + a^2\sqrt{10}}{2}$. En ſe ſervant de la premiere valeur de $r = \frac{-5aa}{2}$, on trouve $q = \frac{3a^4}{2}$, & $p = \frac{-2}{a}$. Et parceque $q$ eſt poſitif, il faut ſubſtituer les valeurs trouvées dans nos deux derniers trinomes, qui ſe changent par la en ceux-ci.

$$y^2 + y\sqrt{2aa + aa\sqrt{10}} + \frac{3aa + aa\sqrt{10}}{2} + \frac{3aa}{\sqrt{2 + \sqrt{10}}}.$$

$$y^2 - y\sqrt{2aa + aa\sqrt{10}} + \frac{3aa + aa\sqrt{10}}{2} - \frac{3aa}{\sqrt{2 + \sqrt{10}}}.$$

XVII. Tout ſextinome peut ſe reſoudre en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimenſions. Car le ſextinome $x^{5n} + ax^{4n} + bx^{3n} + cx^{2n} + ex^n + f$ étant propoſé, qu'on ſuppoſe $x^n = z$; & par la ſubſtitution on le changera en cette equation du cinquieme degré $z^5 + az^4 + bz^3 + cz^2 + ez + f = o$, la quelle aura au moins une racine réelle, comme $z + h$, ou $x^n + h$, qu'on pourra toûjours trouver par l'analyſe ou par la geometrie. Or ſi l'on diviſe le ſexti-

ſextinome par le binome trouvé $x^n + b$, le quotient ſera un quinquinome. Donc puiſque le quinquinome [16] & le binome [15] peuvent toûjours être reſolus en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimenſions, le ſextinome pourra toûjours être reſolu en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimenſions.

XVIII. Les ſeptinomes & les oƈtinomes peuvent toûjours être reſolus en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimenſions. Car on voit aiſement qu'on peut par la ſubſtitution de $z$ aulieu de $x^n$ reduire le ſeptinome a une equation du ſixieme degré, & l'oƈtinome a une equation du ſeptieme degré. Et puiſque les equations d'une nombre impair de dimenſions ont toûjours au moins une racine réelle, ſi l'on diviſe l'equation du ſeptieme degré par ſa racine réelle, on la reduira auſſi, comme le ſeptinome, a une equation du ſixieme degré. Il ſuffit donc de demontrer ici, que l'equation du ſixieme degré peut toûjours etre reſoluë en deux autres equations réelles, l'une de quatre, & l'autre de deux dimenſions.

Que cette equation du ſixieme degré, apres en avoir ôté le ſecond terme, ſoit

$$z^6 + az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$$

Et les deux equations, dont elle eſt le produit, ſoient

$$z^4 - mz^3 + nz^2 + pz + q = 0$$

$$z^2 + mz + r = 0$$

dont le produit eſt

$$\begin{array}{llllll} z^6 - mz^5 + nz^4 + pz^3 + qz^2 + mqz & + rq = 0 \\ \quad\;\; + m \quad - mm + mn - mp + rp & \\ \quad\quad\quad\;\; + r \quad\; - rm + rn & \end{array}$$

Maintenant pour determiner les quantites $m, n, p, q, r$, qu'on compare ce produit avec l'equation $z^6 + az^4 +$ &c.

 en

en egalant tous le termes correſpondans ; & l'on aura par là cinq equations, ſcavoir, 1.$^{ere}$ $r - mm + n = a$. 2.$^{e}$ $p + mn - rm = b$. 3.$^{e}$ $q + mp + rn = c$. 4.$^{e}$ $mq + rp = d$. & 5.$^{e}$ $rq = e$. On trouvera par la premiere $n = a + mm - r$; & ayant ſubſtitué cette valeur de $n$ dans les autres equations, on trouvera par la ſeconde une valeur de $p$, la quelle etant ſubſtituée dans les equations ſuivantes, on trouvera par la troiſieme un valeur de $q$, qu' on ſubſtituera de même dans la quatrieme & dans la cinquieme. On aura par là trois equations ſimples pour determiner les coëfficiens $n$, $p$, $q$; & la quatrieme & cinquieme equations ſeront

La 4.$^{e}$ $cm - bm^2 + am^3 + m^5 - 4rm^3 - 2arm + 3rrm + rb = d$.

La 5.$^{e}$ $cr - brm + arm^2 + rm^4 - 3r^2m^2 - ar^2 + r^3 = e$.

On trouve par la quatrieme equation $3rrm = d - cm + bm^2 - am^3 - m^5 + 4rm^3 + 2arm - rb$, & $rr = \dfrac{d - cm + bm^2 - am^3 - m^5 + 4rm^3 + 2arm - rb}{3m}$. En ſubſtituant ces valeurs, aulieu de $3rrm$ & de $rr$, dans la cinquieme equation, on aura pour determiner $r$ l'equation ſimple

$$r = \frac{5m^8 + 5am^6 - 4bm^5 + 5cm^4 + a^2m^4 - 5dm^3 - b^2m^2 + acm^2 - 9em^2 - adm + cbm - db}{14m^6 + 8am^4 + 5bm^3 + 2aam^2 - 6cm^2 + abm - 3dm - bb}.$$

Enfin ſi l' on ſubſtituë cette valeur de $r$ dans la quatrieme equation, on la changera en une equation de dixſept dimenſions, dans la quelle il n' y aura qu' une inconnue $m$; & l' on trouvera que les deux derniers termes de cette equation s' evanouiſſent, & qu' ainſi etant diviſée par $mm$, elle ſe reduira a une equation de quinze dimenſions $m^{15} + 4am^{13} - 2bm^{12}$ &c. $= 0$.

Or

Or cette equation êtant de dimenſions impaires, à toûjours aumoins une racine réelle, qui donnera une valeur réelle du coefficient $m$; & par la ſubſtitution de cette valeur de $m$ dans les autres equations ſimples trouvées ci deſſus, on aura auſſi les valeurs réelles des autres quantités $r$, $q$, $p$, $n$. Donc l'equation $z^6 + az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = o$. ſera reſolue en deux autres equations réelles, l'une de deux, & l'autre de quatre dimenſions. Et ſi l'on remet dans ces deux equations la valeur de $z$, le ſeptinome propoſé ſera reſolu en un trinome & un quinquinome, les quels (15. 16.) pourront toûjours etre diviſés en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimenſions. On aura donc de cette maniere la reſolution du ſeptinome & de l'octinome, qu'on cherchoit.

XIX. Il ſuit de tout ceque nous avons etabli Juſqu'ici, que les quadratures du cercle & de l'hyperbole etant données, on peut toûjours trouver l'integrale de la fraction $\frac{x^s dx}{R}$, lorſque le denominateur $R$ eſt un binome, ou un trinome, ou un quadrinome, ou un quinquinome, ou un ſextinome, ou un ſeptinome, ou un octinome quelconques, ou le produit de ces polynomes multipliés enſemble, ou meme lors qu'il eſt compoſé des puiſſances de ces polynomes, dont les expoſans ſont des nombres entiers.

XX. Cette induction donne lieu de conjecturer avec beaucoup de vrayſemblance, que les quadratures du cercle & de l'hyperbole etant ſuppoſées, on peut toûjours trouver l'integrale de la fraction $\frac{x^s dx}{R}$; & par conſequent que la fraction $\frac{pdx}{q}$, propoſée au commencement de ce memoire, peut toûjours s'integrer par la quadrature des ſections coniques [6. 7.] Mais comme le raiſonement fondé ſur cette induction

duction n' eſt point demonſtratif, je vais propoſer quelques theoremes, qui pourront être utiles dans la recherche de la reſolution generale de tout polynome en binomes ou trinomes d'une ou de deux dimenſions, recherche penible a cauſe de la longueur des calculs, qu' elle demande.

XXI. On voit aiſement par la methode, dont nous nous ſommes ſervi Juſqu' ici, que ſi l'on peut demontrer que toute equation rationelle & réelle, c' eſt adire, dans la quelle tous les expoſans de l' inconnuë ſont des nombres entiers poſitifs, & les coëfficiens de chaque terme des grandeurs réelles, peut être reſolue en equations réelles d' une ou de deux dimenſions, tout polynome pourra auſſi être reſolu en binomes ou trinomes d' une ou de deux dimenſions. Ainſi nous ne traiterons dans les theoremes ſuivans que de la reſolution des equations rationelles & réelles en equations réelles du premier ou du ſecond degré.

XXII. On ſcait auſſi par les regles de l' analyſe, que toute equation d' une degré impair, comme de 3, 5, 7, 9, 11 &c. dimenſions, a au moins une racine réelle, qu' on peut toûjours trouver ou par le calcul, ou par quelque conſtruction geometrique; & qu' ainſi ce ſortes d' equations peuvent toujours être diviſées par cette racine réelle, & reduites par la aux equations qui ont un nombre pair de dimenſions. Il ne nous reſte donc qu' à conſiderer les equations paires, c' eſt adire de 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 &c. dimenſions.

XXIII. C' eſt encore une regle tres connuë dans l' analyſe, qu' une equation quelconque à autant de racines & de dimenſions, qu' il y à de valeurs de l' inconnuë capables de ſatisfaire aux conditions de la queſtion ou du probleme, d'ou l' on à tiré cette equation.

XXIV. Enfin il eſt demontré dans la doctrine des combinaiſons, que ſi l'on à pluſieurs quantités $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ &c. à combiner enſemble, & que le nombre de ces quantités ſoit nommé $u$, & l'expoſant de la combinaiſon, c' eſt a dire le

le nombre de ces quantités prises ensemble dans chaque combinaison, soit appellé $\pi$, & le nombre des combinaisons $\nu$; on aura $\nu = \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3 \cdot \mu - 4 \;\&c.}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4 \;.\; 5 \;.}$, de sorte qu' il y aura autant de termes & dans le numerateur & dans le denominateur de cette fraction, qu' il ya d' unités dans l' exposant $\pi$.

XXV. Ces lemmes etant supposés, je dis, que si on veut resoudre une equation quelconque $z^{\mu} + az^{\mu - 1} + bz^{\mu - 2} + cz^{\mu - 3} + \&c. = o$ en deux autres equations quelconques

$$z^{\pi} + mz^{\pi - 1} + pz^{\pi - 2} + qz^{\pi - 3} + \&c. = o$$

$$z^{\mu - \pi} + rz^{\mu - \pi - 1} + sz^{\mu - \pi - 2} + tz^{\mu - \pi - 3} + \&c. = o$$

dans les quelles $m$, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, &c. sont les coëfficiens indeterminés qu' on cherche; le produit de ces deux equations sera

$$\begin{array}{lllll} z^{\mu} + mz^{\mu - 1} & + pz^{\mu - 2} & + qz^{\mu - 3} & + \&c. & = o \\ \quad\;\; + r & + rm & + rp & & \\ & + s & + sm & & \\ & & + t & & \end{array}$$

& en comparant termes à termes ce produit avec l' equation proposée, on aura les equations $m + r = a$. $p + rm + s = b$. $q + rp + sm + t = c$. &c. par les quelles on trouvera des equations simples pour detetminer les valeurs des coëfficiens $r$, $s$, $p$, $q$, $t$, &c., & le coëfficient $m$ sera determiné par une equation d' autant de dimensions qu' il y à d'unités dans la quantité $\frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3 \cdot \mu - 4 \;.\; \&c.}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4 \;.\; 5 \;.\; \&c.}$; en sorte que si l' equation par la quelle on determine le coëf-

ficient

ficient $m$, eſt $m^{\nu} + bm^{\nu-1} + km^{\nu-2} + lm^{\nu-3} +$ &c. $= o$, on aura $\nu = \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3 \cdot \mu - 4 \text{ \&c.}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \text{\&c.}}$.

Car l' equation $z^{\mu} + az^{\mu-1} + bz^{\mu-2} +$ &c. $= o$ à autant de racines, qu' il y a d' unités dans l' expoſant $\mu$; & l' equation $m^{\nu} + bm^{\nu-1} + km^{\nu-2} +$ &c. $= o$ à autant de racines, ou de dimenſions, qu' il y a de valeurs de $m$ capables de ſatisfaire au cas propoſé (23.), ou qu' il y à d'unités dans l'expoſant $\nu$. Or ſi on deſigne par $c$, $d$, $e$, $f$, &c. les racines de l' equation $z^{\mu} + az^{\mu-1} + bz^{\mu-2} +$ &c. $= o$; & ſi dans l' equation $z^{\pi} + mz^{\pi-1} + pz^{\pi-2} +$ &c. $= o$ l' expoſant $\pi = 2$, alors puiſque l' equation $m^{\nu} + bm^{\nu-1} + km^{\nu-2} +$ &c. $= o$, par la quelle le coëfficient $m$ eſt determiné, doit ſatisfaire a toutes les combinaiſons de racines $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, &c. priſes deux par deux pour en former des equations du ſecond degré, il y aura dans cette dernier equation $m^{\nu} + bm^{\nu-1} + km^{\nu-2} +$ &c $= o$ autant de valeurs de $m$, qu' il y a de combinaiſons des quantités $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, &c. priſes deux par deux; & par conſequent le nombre des valeurs de $m$, ou des racines, & des dimenſions de cette equation ſera $\frac{\mu \cdot \mu - 1}{1 \cdot 2} = \nu$ (24.)

On demontrera de même, que ſi $\pi = 3$, on aura $\nu = \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; ſi $\pi = 4$ on aura $\nu = \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ & ainſi de ſuite. On aura donc generalement $\nu = \frac{\mu \cdot \mu - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\mu - 2 \cdot \mu - 3 \cdot \mu - 4 \cdot \text{\&c.}}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \text{\&c.}}$

XXVI.

XXVI. Si les equations de huit dimensions peuvent se resoudre en equations réelles d' une ou de deux dimensions, toutes les equations de 9, 10, 11, 12, 13, 14, & 15, dimensions pourront aussi être resolues en equations d' une ou de deux dimensions. Il suffit de demontrer cette proposition pour les equations de 10, 12, & 14 dimensions (22.) Or

I. Si l' on suppose $\mu = 10$, & $\pi = 2$; on aura $\nu = \frac{10.9}{1.2} = 45$. (25); & l'equation $m^{\nu} + bm^{\nu-1} + km^{\nu-2} +$ &c. $= o$ sera d' un degré impair, & par consequent elle aura au moins une racine réelle (22), & l'equation $z^{\pi} + mz^{\pi-1} + pz^{\pi-2} +$ &c. $= o$ sera changée en une equation réelle du second degré, sçavoir, $z^2 + mz + p = o$, [25], par la quelle l' equation $z^{10} + az^9 + bz^8 +$ &c. $= o$ pourra être divisée, & reduite ainsi a une equation de huit dimensions. Donc on pourra la resoudre en deux equations, l' une de huit, & l'autre de deux dimensions.

II. Si l' on suppose $\mu = 12$, & $\pi = 4$; on aura $\nu = \frac{12.\ 11.\ 10.\ 9}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 495$, nombre impair. Donc l' equation de 12 dimensions pourra toûjours être divisée par une equation réelle de 4 dimensions, & reduite par là a une equation de huit dimensions. Ainsi elle pourra toûjours être resolue en deux equations réelles, l' une de huit, & l' autre de 4 dimensions.

III. Si l' on suppose $\mu = 14$, & $\pi = 2$; on aura $\nu = \frac{14.\ 13}{1.\ 2.} = 91$ nombre impair. Par où l' on voit que l'equation de 14 dimensions peut toûjours être resolue en deux equations réelles, l' une de deux, & l' autre de 12 dimensions; & par le cas precedent l' equation de 12 dimensions

 peut

peut toûjours être resolue en equations de huit & de quatre dimensions. Donc l'equation de 14 dimensions peut toûjours être resolue en equations de 8, de 4 & de deux dimensions.

Donc les equations de 10, 12, & 14 dimensions peuvent toûjours être resolues en equations de huit, de 4 ou de deux dimensions; & ainsi puisque les equations de 4 dimensions peuvent se resoudre en equations réelles de deux dimensions [16], si les equations de huit dimensions peuvent aussi se resoudre de la même maniere, les equations de 10, 12, & 14 dimensions pourront toûjours étre resolues en equations réelles d'une ou de deux dimensions.

XXVII. Si les equations du 8.$^e$ & du 16.$^e$ degré peuvent se resoudre en equations réelles du 1.$^e$ ou du 2.$^e$ degré, on pourra aussi resoudre de méme les equations depuis le 16.$^e$ degré jusqu'au 31 inclusivement. Il suffit (22) de demontrer ce theoreme pour les equations des degrés pairs 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30.

Or si $\mu = 18$, & $\pi = 2$; on aura $\nu = \frac{18.\ 17}{1.\ 2} = 9.\ 17.$ nombre impair.

Si $\mu = 20$, & $\pi = 4$; on aura $\nu = \frac{20.\ 19.\ 18.\ 17}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 5.\ 19.\ 3.\ 17.$ nombre impair.

Si $\mu = 22$, & $\pi = 2$; on aura $\nu = \frac{22.\ 21.}{1.\ 2} = 11.\ 21.$ nombre impair.

Si $\mu = 24$, & $\pi = 8$; on aura $\nu = \frac{24.23.22.21.20.19.18.17}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8} = 3.\ 25.\ 11.\ 19.\ 3.\ 17.$ nombre impair.

Si $\mu = 26$, & $\pi = 2$; on aura $\nu = \frac{26.\ 25}{1.\ 2} = 13.\ 25.$ nombre impair.

Si

Si $\mu = 28$, & $\pi = 4$; on aura $\nu = \frac{28. 27. 26. 25}{1. 2. 3. 4} = 7$. 9. 13. 25. nombre impair.

Enfin si $\mu = 30$, & $\pi = 2$; on aura $\nu = \frac{30. 29}{1. 2} = 15$. 29. nombre impair.

On demontrera aisement le theoreme proposé par cequi vient d'étre etabli, en raisonnant comme dans la demonstration du theoreme precedent (26).

XXVIII. Si on peut resoudre les equations de 8, 16, & 32 dimensions en equations réelles du premier ou du second degré; on pourra aussi resoudre de méme les equations depuis le 32.e degré Jusqu'au 63.e inclusivement. Ce theoreme se demontre comme les deux precedens, en faisant seulement attention, qu'il faut egaler $\pi$ a la plus haute puissance de 2, par la quelle $\mu$ puisse étre divisé sans reste. Par exemple dans les cas de $\mu = 40$, & de $\mu = 56$, il faut supposer $\pi = 8$; & dans le cas de $\mu = 48$, il faut supposer $\pi = 16$.

XXIX. Et generalement, si les equations des degrez 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. &c. peuvent se resoudre en equations réelles du premier, ou du second degré, toutes les autres equations pourront aussi se resoudre en equations réelles d'une ou de deux dimensions. Il suffit pour demontrer cette proposition generale de faire voir, que la quantité $\frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2 . \mu - 3 . \mu - 4 . \&c.}{1. 2. 3. 4. 5. \&c.}$. ou la quantité $\frac{\mu}{\pi} \times \frac{\mu - 1}{\pi - 1} \times \frac{\mu - 2}{\pi - 2} \times \frac{\mu - 3}{\pi - 3} \times \frac{\mu - 4}{\pi - 4}$ &c., dans la quelle $\pi$ exprime le plus grand des facteurs 1. 2. 3. 4. 5. &c. est un nombre entier & impair, lorsque $\pi$ etant une puissance de

D 2 2, ou

2, ou un terme de la progreſſion 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. $\frac{\mu}{\pi}$ eſt un nombre impair. Or

I. Il eſt evident que la quantité $\frac{\mu \,.\, \mu-1 \,.\, \mu-2 \,.\, \mu-3 \,.\, \mu-4.\ \&c.}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \&c.}$ eſt un des coëfficiens numeraires des termes d'un binome, comme $a+b$, elevé a la puiſſance $\mu$; car $(a+b)^{\mu}$ $= a^{\mu} + \frac{\mu}{1} a^{\mu-1} b + \frac{\mu.\ \mu-1}{1.\ 2} a^{\mu-2} b^{2} + \frac{\mu.\ \mu-1.\ \mu-2}{1.2.\ \ 3} a^{\mu-3} b^{3} + \frac{\mu.\ \mu-1.\ \mu-2.\ \mu-3}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4} a^{\mu-4} b^{4} +$ &c. Mais lorſque $\mu$ eſt un nombre entier, tous ces coëfficiens ſont auſſi des nombres entiers. Donc la quantité $\frac{\mu.\ \mu-1\ .\ \mu-2.\ \mu-3\ .\ \mu-4\ \&c.}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5\ \&c.}$, dans la quelle on ſuppoſe que $\mu$ eſt un nombre entier, eſt toûjours un nombre entier.

II. Si l'on ſuppoſe que $\pi$ eſt une puiſſance de 2, dont l'expoſant ſoit un nombre entier $r$, & que $\frac{\mu}{\pi}$ ou $\frac{\mu}{2^{r}}$ ſoit un nombre impair quelconque; on pourra exprimer ce nombre impair par $2n+1$, en ſuppoſant que $n$ eſt un nombre entier quelconque, ou zero. On aura donc $\frac{\mu}{\pi} = \frac{\mu}{2^{r}} = 2n+1$, & par conſequent $\mu = 2^{r+1} n + 2^{r}$; & en ſubſtituant ces valeurs de $\pi$ & de $\mu$ dans la quantité $\frac{\mu}{\pi} \times \frac{\mu-1}{\pi-1} \times \frac{\mu-2}{\pi-2} \times \frac{\mu-3}{\pi-3}$

$\frac{\mu - 3}{\pi - 3}$, &c. on la changera en celle ci $\frac{2^{r+1} \cdot n + 2^r}{2^r} \times$

$\frac{2^{r+1} n + 2^r - 1}{2^r - 1} \times \frac{2^{r+1} n + 2^r - 2}{2^r - 2} \times \frac{2^{r+1} n + 2^r - 3}{2^r - 3}$

$\times$ &c. $= \frac{2n + 1}{1} \times \frac{2^{r+1} n + 2^r - 1}{2^r - 1} \times \frac{2^r n + 2^{r-1} - 1}{2^{r-1} - 1} \times$

$\frac{2^{r+1} n + 2^r - 3}{2^r - 3} \times \frac{2^{r-1} n + 2^{r-2} - 1}{2^{r-2} - 1} \times$ &c.

Or tous les numerateurs, & tous les denominateurs de ces fractions sont des nombres impairs; & par consequent le produit de tous ces numerateurs & le produit de tous ces denominateurs sont aussi des nombres impairs; d' ou il suit, que le quotient de la division du produit des numerateurs par le produit des denominateurs est un nombre impair.

Donc la quantité $\frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3 \cdot \mu - 4 \cdot \&c.}{\pi \cdot \pi - 1 \cdot \pi - 2 \cdot \pi - 3 \cdot \pi - 4 \cdot \&c.}$ dans les suppositions que nous avons faites, est un nombre entier & impair.

XXX. Il suit de la, que si l' on peut resoudre les polynomes de 5.9.17.33.65.129. &c. noms ou termes en binomes ou trinomes d' une ou de deux dimensions; on pourra resoudre de même tous les autres polynomes. Car il est tres facile de demontrer que les polynomes, dont les nombres de termes, ou noms, sont 5.6.7.8.9.10. 11. &c., se reduisent aux equations, dont les dimensions respectives sont 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. &c. [15. 16. 17. 18. 21.]

XXXI. Si les equations, aux quelles on a reduit les polynomes, ont quelque racine réelle; on pourra toûjours la trouver par l'analyse, ou au moins par quelque construction geo-

geometrique. Par consequent si une equation du 8.$^e$ degré a quelques racines réelles, on pourra toûjours la resoudre en equations réelles du 1.$^e$ ou du 2.$^e$ degré; si une equation de 16 dimensions a quelques racines réelles, on pourra toûjours la resoudre au moins en une equation du 8.$^e$ degré & en d'autres equations du 1.$^e$ ou du 2.$^e$ degré; de même si une equation du 32.$^e$ degré a quelques racines réelles, on pourra la resoudre en equations du 16.$^e$, 8.$^e$, & 1.$^e$ ou 2.$^e$ degrés; & ainsi des autres. Cela se comprend aisement par ce qui a eté demontré ci dessus.

XXXII. Si une equation du 8.$^e$ degré n'a point de racines réelles, & qu'on veuille la resoudre par la methode de l'article 25. en equations réelles du premier ou du second degré; en faisant $\pi = 2$, on aura $\nu = \frac{8.7}{1.2} = 28$. C'est pourquoy l'equation par la quelle on determinera le coëfficient $m$, sera de 28 dimensions; & si cette equation du 28 degré a quelques racines réelles (comme il y a lieu de croire qu'elle en aura toûjours Art. 19. 20.); on pourra resoudre l'equation du 8.$^e$ degré en equations réelles du 1.$^e$ ou du 2.$^e$ degré. On pourroit aussi supposer $\pi = 4$; & dans ce cas on trouveroit $\nu = \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 70$. Mais si la supposition de $\pi = 2$ ne donne rien, celle de $\pi = 4$ ne donnera rien non plus; ainsi elle est inutile.

XXXIII. De même si une equation du 16.$^e$ degré n'a point de racines réelles, & qu'on veuille la resoudre par la methode de l'article 25 en equations réelles du 1.$^e$ ou 2.$^e$ degré; en faisant $\pi = 2$, on aura $\nu = \frac{16.15}{1.2} = 120$. Ainsi elle dependra d'une equation de 120 dimensions, par la quelle le coëfficient $m$ sera determiné. Si on suppose $\pi = 6$, on aura $\nu = 8008$; si $\pi = 8$, on aura $\nu = 12870$. Mais ces dernieres suppositions sont inutiles.

On

On voit bien qu' on peut continuer ces theoremes, ou corrollaires, tant qu' on voudra.

XXXIV. Toute equation, dans la quelle le premier & le dernier termes ont des signes contraires, a quelque racine réelle. Car soit l' equation quelconque

$$x^{\mu} + ax^{\mu-1} + bx^{\mu-2} \ldots\ldots + sx - t = o$$

dans la quelle $\mu$ est un nombre entier positif, $+ x^{\mu}$ le premier terme positif, & $- t$ le dernier terme negatif. Qu'on suppose $xy = t$, cequi est une equation a une hyperbole entre les asymptotes, dont les coordonnées sont $x$ & $y$; & l'on aura $x^{\mu} + ax^{\mu-1} + bx^{\mu-2} \ldots\ldots + sx = xy$, & divisant par $x$, on aura $x^{\mu-1} + ax^{\mu-2} + bx^{\mu-3} \ldots\ldots + s = y$, equation a une courbe parabolique, dans la quelle si l' on suppose $x = o$, on aura $y = s$; & $y = o$, si $s = o$. Mais si l'on suppose que $x$ devienne infinie, on aura $x^{\mu-1}, = y$, c' est a dire que $y$ deviendra aussi infinie. Donc si l'on combine ensemble ce deux courbes, en sorte que les abscisses $x$ leurs soient communes, la parabole coupera necessairement l' hyperbole; puisque l' ordonnée $y$ s' evanouit dans l' hyperbole, lorsque l' abscisse $x$ devient infinie, & qu' au contraire l' ordonnée $y$ devient infinie dans la parabole, lorsque l' abscisse $x$ devient infinie, & que l' abscisse $x$ s' evanouissant, l'ordonnée $y$ devient infinie dans l' hyperbole, & s' evanouit ou est finie dans la parabole. Donc ces deux courbes ainsi combinées auront au moins une ordonnée commune, qui passera par le point de leur intersection, & l' abscisse correspondante a cette ordonnée sera une valeur réelle de $x$, qui satisfera a l' equation proposée $x^{\mu} + ax^{\mu-1} + bx^{\mu-2} \ldots\ldots + sx - t = o$. Donc cette equation aura au moins une racine réelle.

XXXV. Et par ce qu' une equation d' un nombre pair de dimensions ne peut avoir moins de deux racines réelles, si elles

ſi elles ne ſont pas toutes imaginaires ; il ſuit de ce que nous venons de demontrer, que les equations paires, dont le premier & le dernier termes ont des ſignes contraires ; ont toûjours au moins deux racines réelles.

XXXVI. Donc une equation quelconque de 8 dimenſions, dont le premier & le dernier termes ont des ſignes contraires, peut toûjours être reſolue en equations réelles d' une ou de deux dimenſions [31]. D' ou il ſuit encore, qu'un polynome de neuf noms ou termes (qui peut toûjours ſe reduire a une equation de 8 dimenſions) dans lequel le premier & le dernier termes ont des ſignes contraires, pourra toûjours être reſolu en binomes ou trinomes d' une ou de deux dimenſions.

XXXVII. De même une equation de 16 dimenſions, dont le premier & le dernier termes ont des ſignes contraires, peut toûjours ſe reſoudre en une equation de huit dimenſions, & en d'autres equations d'une ou de deux dimenſions [31]. Une equation de 32 dimenſions, dont le premier & le dernier termes ont de ſignes contraires, peut toûjours ſe reſoudre en une equation de 16 dimenſions, & en d' autres equations du 8.<sup>e</sup> & du 1.<sup>e</sup> ou 2.<sup>e</sup> degrés [31]. Et ainſi des autres.

XXXVIII. Si une equation de 8 dimenſions n' a aucunes racines réelles, & qu' on la diviſe par une equation de deux dimenſions, dans la quelle on employe des coëfficiens indeterminés, qui ſe trouvent enſuite determinés par une equation, dont le premier & le dernier termes ayent des ſignes contraires ; l' equation de huit dimenſions pourra ſe reſoudre en equations réelles d' une ou de deux dimenſions [32]. De même ſi une equation de 16 dimenſions n' a aucunes racines reelles, & qu' on la diviſe par une equation du ſecond degré, dans la quelle on employe des coëfficiens indeterminés, qui ſe trouvent enſuite determinés par une equation, dont le premier & le dernier termes ont de ſignes contraires ; cette equation de 16 dimenſions pourra être reſolue

ſolue en equations de huit & de deux dimenſions [33]. Et ainſi du reſte.

XXXIX. L' equation generale paire $x^{2\mu} + bx^{2\mu-1} + kx^{2\mu-2} + lx^{2\mu-3} + px^{2\mu-4} + qx^{2\mu-5} + rx^{2\mu-6} + sx^{2\mu-7} + tx^{2\mu-8} + \&c. = 0$ eſt exactement diviſible par l' equation du ſecond degré $x^2 - m = 0$, ſi l' on a ces deux egalités

1.^e $bm^{\mu-2} + lm^{\mu-2} + qm^{\mu-3} + sm^{\mu-4} + \&c. = 0$.

2.^e $m^{\mu} + km^{\mu-1} + pm^{\mu-2} + rm^{\mu-3} + tm^{\mu-4} + \&c. = 0$.

Et le quotient ſera

$$\begin{array}{lllllll} x^{2\mu-2} + bx^{2\mu-3} & +kx^{2\mu-4} & +lx^{2\mu-5} & +px^{2\mu-6} & +qx^{2\mu-7} & +rx^{2\mu-8} & +\&c. = 0 \\ & +m & +bm & +km & +lm & +pm & \\ & & & +mm & +bmm & +kmm & \\ & & & & & +m^3 & \end{array}$$

Car ſi on ſuppoſe $\mu = 2$, & $2\mu = 4$, l' equation generale, en faiſant $q, r, s, t$, &c. egaux chacun a zero, ſe change en celle ci $x^4 + bx^3 + kx^2 + lx + p = 0$, la quelle etant diviſée par $x^2 - m = 0$, donne pour quotient $x^2 + bx + k + m = 0$, & pour reſtes de la diviſion $lx + bmx$, & $p + km + mm$. Donc ſi l' on a ces deux egalités $l + bm = 0$, & $p + km + m^2 = 0$, la diviſion ſe fera exactement.

Si on ſuppoſe $\mu = 3$, & $2\mu = 6$, les reſtes de la diviſion ſeront $bm^2x + lmx + qx$, & $m^3 + km^2 + pm + r$. Donc ſi l' on a les deux egalités $bm^2 + lm + q = 0$, & $m^3 + km^2 + pm + r = 0$, la diviſion ſe fera ſans reſte.

Si on ſuppoſe $\mu = 4$, & $2\mu = 8$, les reſtes de la diviſion

 ſeront

feront $bm^3x + lm^2x + qmx + sx$, & $m^4 + km^3 + pm^2 + rm + t$. Donc en fuppofant ces deux quantités egales chacune a zero, la divifion fe fera fans refte.

Par ou l' on voit, qu' en fuppofant generalement $bm^{\mu-1} + lm^{\mu-2} + qm^{\mu-3} + sm^{\mu-4} + \&c. = o$, & $m^{\mu} + km^{\mu-1} + pm^{\mu-2} + rm^{\mu-3} + tm^{\mu-4} + \&c. = o$, l'equation generale fera exactement divifible par $x^2 - m$.

XL. Soit propofée l' equation generale de 4 dimenfions, dont on a oté le fecond terme, & qu' on fuppofe n' avoir aucunes racines réelles,

$$x^4 + ax^2 + bx + c = o.$$

Qu' on faffe $x = z + y$, en fuppofant que $z$ eft une variable, & $y$ une conftante indeterminée; & ayant fubftitué $z + y$ aulieu de $x$, on aura cette equation

$$\begin{array}{lllll} z^4 + 4yz^3 & + 6y^2z^2 & + 4y^3 z & + y^4 & \\ & + a & + 2ay & + ayy & = o. \\ & & + b & + by & \\ & & & + c & \end{array}$$

Pour trouver le divifeur $z^2 - m = o$ de cette equation, il faut refoudre les deux egalités cu equations $l + bm = o$, & $p + km + m^2 = o$, dans les quelles $b, k, l, p$ reprefentent les coëfficiens refpectifs des termes de l' equation $z^4 + 4yz^3 + \&c. = o$, c' eft adire, que $b = 4y$, $k = 6y^2 + a$, &c. Or par la premiere de ces deux equations on trouve $m = \frac{-l}{b}$; & fubftituant cette valeur de $m$ dans l'autre equation, on a $pb^2 - klb + ll = o$, la quelle par la fubftitution des valeurs de $b, k, l, \& p$, fe change en cette equation du fixieme degré

$64y^6$

$$\begin{array}{l} 64y^6 + 32y^4 - 16cy^2 - bb = 0, \\ \qquad\qquad + 4aay^2 \end{array}$$

dans la quelle le premier & le dernier termes ont des fignes contraires. Cette equation a donc au moins deux racines réelles (35), les quelles étant fubftituées dans l'equation $m = \frac{-l}{h} = \frac{-4y^3 - 2ay - b}{4y}$, donneront deux valeurs réelles de $m$; & par confequent on connoitra le divifeur $z^2 - m$. On a donc encore par la une autre methode pour refoudre les equations de quatre dimenfions en d'autres equations réelles de deux dimenfions; & l'on peut appliquer cette methode aux equations fuperieurs.

XLI. Soit l'equation generale de huit dimenfions, dont on a oté le fecond terme

$$x^8 + ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g = 0.$$

Ayant fait $x = z + y$, & fubftitué cette valeur de $x$ dans l'equation propofée, on aura $z^8 + 8yz^7$

$$\begin{array}{lllllll}
+28y^2z^6 & +56y^3z^5 & +70y^4z^4 & +56y^5z^3 & +28y^6z^2 & +8y^7z & +y^8 \\
+a & +6ay & +15ay^2 & +20ay^3 & +15ay^4 & +6ay^5 & +ay^6 \\
 & +b & +5by & +10by^2 & +10by^3 & +5by^4 & +by^5 \quad = 0 \\
 & & +c & +4cy & +6cy^2 & +4cy^3 & +cy^4 \\
 & & & +d & +3dy & +3dy^2 & +dy^3 \\
 & & & & +e & +2ey & +ey^2 \\
 & & & & & +f & +fy \\
 & & & & & & +g
\end{array}$$

Pour trouver le divifeur $z^2 - m$ de cette equation, il faut

 refou-

resoudre (39) ces deux equations, la 1.e $bm^3 + lm^2 + qm + s = 0$, & la 2.e $m^4 + km^3 + pm^2 + rm + t = 0$, dans les quelles $b, k, l, p, q, r, s, t$ reprefentent les coëfficiens respectifs $8y$. $28y^2 + a$, $56y^3 + 6ay + b$, &c.

La premiere equation donne $m^3 = \frac{-lm^2 - qm - s}{b}$; & en substituant cette valeur de $m^3$ dans la seconde equation, on a

$$\begin{array}{llll} l^2m^2 & + lqm & + ls & \\ + b^2p & + b^2r & + b^2t & = 0. \\ - bq & - bs & - bks & \\ - bkl & - bkq & & \end{array}$$

Pour abreger le calcul, je suppose $l^2 + b^2p - bq - bkl = \varpi$, $lq + b^2r - bs - bkq = \tau$, & $ls + b^2t - bks = \nu$; ce qui change la derniere equation en celleci $\varpi m^2 + \tau m + \nu = 0$, par la quelle on a $m^2 = \frac{-\tau m - \nu}{\varpi}$. En substituant cette valeur de $m^2$ dans la 1.e equation, on trouve $- b\varpi\nu m + b\tau^2 m - \varpi l\tau m + \varpi^2 qm + b\tau\nu - \varpi l\nu + \varpi^2 s = 0$, & par consequent $m = \frac{\varpi l\nu - b\tau\nu - \varpi^2 s}{b\tau^2 + \varpi^2 q - l\varpi\nu - \varpi l\tau} = \frac{\lambda}{\delta}$, en supposant $\lambda$ egale au numerateur & $\delta$ egale au denominateur. Si l'on substitue cette valeur de $m$ dans l'equation $\varpi m^2 + \tau m + \nu = 0$, on aura $\varpi\lambda\lambda + \delta\tau\lambda + \delta\delta\nu = 0$; & si aulieu de $\lambda$ & $\delta$ on remet leurs valeurs dans cette derniere equation, elle deviendra en l'ordonnant par rapport a $\varpi$

$ss\varpi^3$

$$\left.\begin{array}{llll} ss\pi^3 & -\,2sl\nu\pi^2 & +\,3bs\tau\nu\pi & +\,b^2\nu^3 \\ +\,q^2\nu & +\,l^2\nu^2 & & -\,bs\tau^3 \\ -\,qs\tau & -\,2bq\nu^2 & & -\,bl\tau\nu^2 \\ & -\,lq\tau\nu & & +\,bq\tau^2\nu \\ & +\,ls\tau^2 & & \end{array}\right\} = 0$$

Si au lieu de $\pi$, $\tau$, $\nu$ on ecrit leurs valeurs dans cette equation, & qu' on l' ordonne par rapport a $b$, on trouvera que les quatre derniers termes s' evanouiront, & que par consequent si on vouloit remetre dans cette equation les valeurs de $b$, $k$, $l$, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, elle deviendroit un equation du 28.e degré. Je n' ay pas achevé ce calcul a cause de sa longueur, & du peu de tems que je peux donner a cette sorte d' occupations. Mais si en l' achevant ou trouvoit le premier & le dernier termes de l' equation du 28.e degré avec des signes contraires, on seroit assuré de la resolution de l' equation proposée du huitieme degré en equations réelles du second degré.

XLII. Voici encore une methode bien generale pour resoudre les equations paires en equations réelles de deux dimensions. Soit proposée l' equation generale paire

$$x^{2\mu} + ax^{2\mu-1} + bx^{2\mu-2} + cx^{2\mu-3} + \&c. = 0.$$

Supposant que $z$ soit une variable & $y$ une constante indeterminée, qu' on fasse $x = z + y$; & que l' equation proposée par la substitution de $z + y$ aulieu de $x$ se change en celle-ci

$$z^{2\mu} + bx^{2\mu-1} + kz^{2\mu-2} + lz^{2\mu-3} + pz^{2\mu-4} + \&c. = 0$$

Dans la quelle les coëfficiens $b$, $k$, $l$, $p$, $q$, &c. seront composés de constantes determinées $a$, $b$, $c$, &c. & de la constante indeterminée $y$. Aulieu de diviser cette equation par le binome $z^2 - m$, qu' on la divise par le trinome $z^2 - nz - m$

$nz - m$, dans le quel $n$ & $m$ ſont auſſi deux conſtantes indeterminées; & on trouvera, comme ci deſſus [39], que pour faire cette diviſion ſans reſte, il faudra reſoudre deux equations, qui contiendront les trois indeterminées $y$, $n$ & $m$. En combinant ces deux equations par les methodes ordinaires, on pourra toûjours les changer en deux autres, dont l'une ſera une equation ſimple, qui donnera la valeur d'une inconnue, comme de $m$, par les deux autres inconnues $y$ & $n$ combinées entr' elles & avec les quantités connuës, & l' autre equation ne contiendra plus que ces deux inconnuës $y$ & $n$, dont par conſequent on pourra prendre l' une a diſcretion. C' eſt pourquoy ſi l' on peut trouver une valeur réele de $y$ ou de $n$, la quelle etant ſubſtituée dans cette equation donne une valeur réelle de l' autre inconnuë, ayant remis ces valeurs aulieu de $y$ & de $n$ dans l' equation ſimple, par la quelle $m$ eſt determinée, on aura auſſi une valeur réelle de $m$; & par conſequent le trinome $z^2 - nz - m$, par le quel on pourra exactement diviſer l' equation propoſée, ſera connu.

Or l' equation dans la quelle il n' y a que les deux inconnuës $y$ & $n$, eſt un lieu a une courbe geometrique, dont les coordonnées ſont $y$ & $n$. Si donc on decrit cette courbe, on aura un infinité de valeurs réelles de $y$ & de $n$, les quelles etant ſubſtituées dans l' equation ſimple, qu'on a trouvée pour determiner $m$, donneront auſſi la valeur réelle de $m$.

On peut encore, ſans decrire cette courbe, former arbitrairement une nouvelle equation, qui contienne les deux inconnuës $y$ & $n$, ou l' une des deux ſeulement; pourvû que cette equation ſoit telle, qu'en la combinant avec l' autre equation, qui contient les deux mêmes inconnuës, on trouve des valeurs réelles de ces inconnuës. Ce qui donne beaucoup de moyens pour trouver les diviſeurs des equations de 8, 16, 32, &c. dimenſions. Mais comme cette recherche demande de tres longs calculs, je la remets a un autre tems.

XLIII. Je

XLIII. Je reviens presentement a la fraction $\frac{x^5 dx}{R}$, a la quelle se reduit la proposée $\frac{pdx}{q}$. Il est evident par cequi a eté demontré jusqu'ici, que pour trouver l'integrale de cette fraction, il faut faire trois operations; la premiere, pour resoudre les polynomes, dont le denominateur $R$ est composé, en binomes & trinomes d'une ou de deux dimensions; la seconde, pour separer ces binomes & trinomes & leurs puissances; & la troisieme, pour integrer les fractions qui naissent de ces operations, & dans les quelles les denominateurs sont des binomes ou trinomes d'une ou de deux dimensions, ou leurs puissances dont les exposans sont des nombres entiers. Or pour abbreger le travail & le tems, que demandent ces operations, on pourroit construire trois tables, la premiere pour la resolution des polynomes, la seconde pour la separation des binomes & trinomes, & la troisieme pour l'integration des fractions que donne cette separation.

XLIV. Voici une commencement de la premiere table.

Pour resoudre le binome $x^n + b$

Qu'on fasse $b = + a^n$, & ensuite $b = - a^n$, & successivement $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, &c.

$$x^3 + a^3 \begin{cases} x + a \\ x^2 - ax + aa \end{cases}$$

$$x^4 + a^4 \begin{cases} x^2 + ax\sqrt{2} + aa \\ x^2 - ax\sqrt{2} + aa \end{cases}$$

$x^5$

$$x^5 + a^5 \begin{cases} x + a \\ x^2 \dfrac{-ax + ax\sqrt{5}}{2} + aa \\ x^2 \dfrac{-ax - ax\sqrt{5}}{2} + aa \end{cases}$$

$$x^6 + a^6 \begin{cases} x^2 + aa \\ x^2 + ax\sqrt{3} + aa \\ x^2 - ax\sqrt{3} + aa \end{cases}$$

$$x^7 + a^7 \begin{cases} x + a \\ x^2 + mx + aa \\ m^3 + am^2 - 2a^2m - a^3 = 0 \text{ ; equation irreductible .} \end{cases}$$

$$x^8 + a^8 \begin{cases} x^2 + x\sqrt{2aa + aa\sqrt{2}} + aa \\ x^2 + x\sqrt{2aa - aa\sqrt{2}} + aa \\ x^2 - x\sqrt{2aa + aa\sqrt{2}} + aa \\ x^2 - x\sqrt{2aa - aa\sqrt{2}} + aa \end{cases}$$

&c.

$$x^3 - a^3 \begin{cases} x - a \\ x^2 + ax + aa \end{cases}$$

$$x^4 - a^4 \begin{cases} x + a \\ x - a \\ x^2 + aa \end{cases}$$

$x^5$

$$x^5 - a^5 \left\{ \begin{array}{l} x - a \\ x^2 + \dfrac{ax + ax\sqrt{5}}{2} + aa \\ x^2 + \dfrac{ax - ax\sqrt{5}}{2} + aa \end{array} \right.$$

$$x^6 - a^6 \left\{ \begin{array}{l} x + a \\ x - a \\ x^2 - ax + aa \\ x^2 + ax + aa \end{array} \right.$$

$$x^7 - a^7 \left\{ \begin{array}{l} x - a \\ x^2 + mx + aa \\ m^3 - am^2 - 2a^2m + a^3 = 0\,. \end{array} \right.$$

$$x^8 - a^8 \left\{ \begin{array}{l} x + a \\ x - a \\ x^2 + aa \\ x^2 + ax\sqrt{2} + aa \\ x^2 - ax\sqrt{2} + aa \end{array} \right.$$

&c. &c.

Pour resoudre le trinome $x^{2n} + bx^n \mp c$

Il faut distinguer deux cas, le premier pour $-c$, & le second pour $+c$. Dans le premier cas je fais $a^n = \dfrac{\sqrt{bb+4c}+b}{2}$

& $e^n = \frac{\sqrt{bb + 4c} - b}{2}$; & le trinome $x^{2n} + bx^n - c$, ſe reſout dabord en deux binomes $x^n + a^n$, & $x^n - e^n$; les quels ſe reſoudront enſuite par la premiere partie de cette table en binomes & trinomes d' une ou de deux dimenſions.

Dans le ſecond cas, l' on a ou $\frac{1}{4}bb = c$, ou $\frac{1}{4}bb > c$, ou enfin $\frac{1}{4}bb < c$. Lorſque $\frac{1}{4}bb = c$, le trinome eſt un quarré $x^{2n} + bx^n + \frac{1}{4}bb$, qu' on reſout dabord en deux binomes egaux $x^n + \frac{1}{2}b$, & $x^n + \frac{1}{2}b$. De même lorſque $\frac{1}{4}bb > c$, le trinome $x^{2n} + bx^n + c$ ſe reſout dabord en deux binomes $x^n + \frac{b + \sqrt{bb - 4c}}{2}$ & $x^n + \frac{b - \sqrt{bb - 4c}}{2}$. Et enſuite ces binomes ſe pourront reſoudre par la premiere partie de cette table en binomes & trinomes d' une ou de deux dimenſions. Mais quand $\frac{1}{4}bb < c$, la quantité $\sqrt{bb - 4c}$ eſt imaginaire; & pour lors on pourra ſe ſervir de la methode de Mr. Gabriel Manfredi, par la quelle, en ſuppoſant $c = a^{2n}$, on trouvera

$$x^4 + bx^2 + c \left\{ \begin{array}{l} x^2 - x\sqrt{2aa - b} + aa \\ x^2 + x\sqrt{2aa - b} + aa \end{array} \right.$$

$$x^6 + bx^3 + c \left\{ \begin{array}{l} x^2 + mx + aa \\ m^3 - 3aam - b = 0 \end{array} \right.$$

$x^8$

$$x^8 + bx^4 + c \left\{ \begin{array}{l} x^2 + x\sqrt{2a^2 + \sqrt{2a^4 - b}} + aa \\ x^2 - x\sqrt{2a^2 + \sqrt{2a^4 - b}} + aa \\ x^2 + x\sqrt{2a^2 - \sqrt{2a^4 - b}} + aa \\ x^2 - x\sqrt{2a^2 - \sqrt{2a^4 - b}} + aa \end{array} \right.$$

&c. &c.

On pourra conſtruire les autres parties de cette table par ce qui a été demontré ſur la reſolution des quadrinomes, des quinquinomes, & des autres polynomes ſuperieurs.

Pour la ſeconde table, on pourra ſe ſervir de la methode expliquée dans les articles 10.$^e$ & 11.$^e$, ou de quelqu' autre.

XLV. Enfin on conſtruira la 3.$^e$ table en trouvant les integrales de ces neuf differentielles, $x^m dx$. $\frac{dx}{x+a}$. $\frac{dx}{xx+b}$. $\frac{xdx}{x^2+b}$. $\frac{dx}{xx+ax+b}$. $\frac{xdx}{xx+ax+b}$. $\frac{x^s dx}{(x+a)^\delta}$. $\frac{x^s dx}{(xx+b)^\delta}$. $\frac{x^s dx}{(xx+ax+b)^\delta}$. dans les quelles $a$ & $b$ ſont des quantités quelconques conſtantes & réelles, poſitives ou negatives; les expoſans $s$ & $\delta$ des nombres entiers & poſitifs; $\delta$ plus grand que l' unité; & $s$ plus petit que $\delta$ dans la fraction $\frac{x^s dx}{(x+a)^\delta}$, & moindre que $2\delta$ dans les deux fractions ſuivantes $\frac{x^s dx}{(xx+b)^\delta}$, & $\frac{x^s dx}{(xx+ax+b)^\delta}$. Car autrement il faudroit diviſer le numerateur par le denominateur, juſqu' aceque la fraction, qui reſteroit après la diviſion, eut les conditions que je viens de dire.

XLVI. Or I. l'integrale $S.\,x^{m}dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$; & si $m = -1$, l'integrale $S.\,x^{-1}dx = l.\,x$, en prennant les logarithmes dans la logarithmique, dont la soûtangente est l'unité.

II. $S.\,\frac{dx}{x+a} = l.\,\overline{x+a}$.

III. Si la quantité $b$ est positive dans la fraction $\frac{dx}{xx+b}$; qu'on prenne $\sqrt{b}$ pour le rayon d'un cercle, & $A$ pour un arc du même cercle, dont la tangente est $x$; & on aura $S.\,\frac{dx}{xx+b} = \frac{A}{b}$. Mais si $b$ est negative, de sorte que la fraction soit $\frac{dx}{xx-b}$ ou $\frac{-dx}{b-xx}$, on aura $S.\,\frac{dx}{xx-b} = \frac{-1}{2\sqrt{b}}\,l.\,\frac{\sqrt{b}+x}{\sqrt{b}-x}$.

IV. $S.\,\frac{xdx}{xx+b} = \frac{1}{2}\,l.\,\overline{xx+b}$.

V. La fraction $\frac{dx}{xx+ax+b}$, en supposant $x = z - \frac{1}{2}a$, se reduit a celle-ci $\frac{dz}{zz+b-\frac{1}{4}aa}$, qui a la même forme que $\frac{dx}{xx+b}$, que nous venons d'integrer.

VI. De même la fraction $\frac{xdx}{xx+ax+b}$, en faisant $x = z - \frac{1}{2}a$, se change en ces deux-ci $\frac{zdz}{zz+b-\frac{1}{4}aa}$ & $\frac{-\frac{1}{2}adz}{zz+b-\frac{1}{4}aa}$, qui

qui s' integrent comme les fractions $\frac{xdx}{xx+b}$, & $\frac{dx}{xx+b}$.

VII. Pour integrer la fraction $\frac{x^s dx}{(x+a)^\delta}$, je fais $x = z - a$, & je la change par la substitution en celleci $\frac{(z-a)^s dz}{z^\delta}$, laquelle, en developant la puissance $s$ du binome $z - a$, se change en cette suite finie $z^{s-\delta} dz - saz^{s-\delta-1} dz + \frac{s.s-1}{1.2} a^2 z^{s-\delta-2} dz - \frac{s.s-1.s-2}{1.2.3} a^3 z^{s-\delta-3} dz +$ &c., dont chaque terme s' integre comme la differentielle $x^{-m} dx$. On aura donc S. $\frac{(z-a)^s dz}{z^\delta} = \frac{z^{s-\delta+1}}{s-\delta+1} - \frac{saz^{s-\delta}}{s-\delta} + \frac{s.s-1.a^2 z^{s-\delta-1}}{2(s-\delta-1)} - \frac{s.s-1.s-2.a^3 z^{s-\delta-2}}{2.3.(s-\delta-a)}$ + &c. Quand dans le premier terme de cette suite l' exposant $s - \delta + 1$ s' evanouit, aulieu de $\frac{z^{s-\delta+1}}{s-\delta+1}$ il faut mettre $l. z$; car dans ce cas $z^{s-\delta} dz = z^{-1} dz$

VIII. Pour trouver l' integrale de la fraction $\frac{x^s dx}{(b+x^2)^\delta}$, il faut distinguer deux cas; le premier, lorsque $s$ est un nombre impair, & le second, lorsque c' est un nombre pair.

Dans le premier cas, je mets $2m+1$ aulieu de $s$, supposant que $m$ est un nombre entier positif quelconque, ou zero; & la fraction $\frac{x^{2m+1} dx}{(b+xx)^\delta}$, en faisant $xx = z - b$, se

ſe change en celleci $\frac{\frac{1}{2}(z-b)^m dz}{z^\delta}$, qu' on integrera comme la fraction $\frac{(z-a)^s dz}{z^\delta}$. [VII.]

Dans le ſecond cas, je mets $2m$ aulieu de $s$, ſuppoſant que $m$ eſt un nombre entier poſitif quelconque, ou zero; & je trouve par la 7.e prop. du traité des quadratures des courbes de Mr. Newton, que l' integrale de la differentielle $\frac{x^{2m}dx}{(b+xx)^\delta}$ eſt $= \frac{x^{2m+1}}{(2\delta b-2b)\times(b+xx)^{\delta-1}} - \frac{(2m+3-2\delta)}{2\delta b-2b}$. S. $\frac{x^{2m}dx}{(b+xx)^{\delta-1}}$. Or l' integrale S. $\frac{x^{2m}dx}{(b+xx)^{\delta-1}}$ ſe peut toûjours trouver par les formules ci deſſus, pourvu que $\delta=2$. Car ſi $m=0$, la fraction $\frac{x^{2m}dx}{b+xx}$ devient $\frac{dx}{b+xx}$, que nous avons integrée au nombre III. Si $m=1$, la fraction devient $\frac{x^2dx}{x^2+b} = dx - \frac{bdx}{b+xx}$, dont l' integrale eſt $= x - b$ S. $\frac{dx}{b+xx}$. Si $m=2$, la fraction eſt $\frac{x^4dx}{x^2+b} = x^2dx - bdx + \frac{bbdx}{b+xx}$, dont l'integrale eſt $= \frac{1}{3}x^3 - bx + bb$ S. $\frac{dx}{b+xx}$. Si $m=3$, la

fraction

fraction sera $\frac{x^6 dx}{xx+b} = x^4 dx - bx^2 dx + b^2 dx - \frac{b^3 dx}{x^2+b}$,

dont l' integrale est $= \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{3} bx^3 + bbx - b^3 \text{ S.} \frac{dx}{xx+b}$.

Et generalement $\frac{x^{2m} dx}{x^2+b} = x^{2m-2} dx - b x^{2m-4} dx$
$+ b^2 x^{2m-6} dx - b^3 x^{2m-8} dx + b^4 x^{2m-10} dx \ldots\ldots$
$\mp \frac{b^m dx}{b+xx}$; dont l' integrale est $= \frac{x^{2m-1}}{2m-1} - \frac{bx^{2m-3}}{2m-3}$
$+ \frac{b^2 x^{2m-5}}{2m-5} - \frac{b^3 x^{2m-7}}{2m-7} + \frac{b^4 x^{2m-9}}{2m-9} \ldots\ldots\ldots$
$\mp b^m \text{ S.} \frac{dx}{b+xx}$. Il faut continuer cette suite, avant de parvenir au terme $b^m \text{ S.} \frac{dx}{b+xx}$, jusqu' a ceque l' exposant de la variable $x$ soit egal a l' unité.

Si l'on designe par $B$ l' integrale $\text{S.} \frac{x^{2m} dx}{b+xx}$, que nous venons de trouver; on aura, en supposant $\delta = 2$, l' integrale $\text{S.} \frac{x^{2m} dx}{(b+xx)^\delta} = \frac{x^{2m+1}}{2b(b+xx)} - \frac{(2m-1).B}{2b}$, que j' appelle $C$.

Et si $\delta = 3$, on aura $\text{S.} \frac{x^{2m} dx}{(b+xx)^3} = \frac{x^{2m+1}}{4b(b+xx)^2}$
$- \frac{(2m-3).C}{4b}$, que je designe par $D$.

Et si

Et si $\delta = 4$, ou aura S. $\frac{x^{2m}dx}{(b+xx)^4} = \frac{x^{2m+1}}{4b(b+xx)^3} - \frac{(2m-5).D}{6b}$. Et ainsi de suite a l' infini ; car on voit assez la progression.

IX. Enfin la differentielle $\frac{x^s dx}{(xx+ax+b)^\delta}$, en faisant $x = z - \frac{1}{2}a$, se change en celle-ci $\frac{(z-\frac{1}{2}a)^s dz}{(zz+b-\frac{1}{4}aa)^\delta} =$

$$\frac{z^s dz}{(zz+b-\frac{1}{4}aa)^\delta} - \frac{\frac{1}{2}saz^{s-1}dz}{1.(zz+b-\frac{1}{4}aa)^\delta} + \frac{\frac{1}{4}s.s-1.a^2z^{s-2}dz}{1.2.[zz+b-\frac{1}{4}aa]^\delta} - \frac{\frac{1}{8}s.s-1.s-2.a^3z^{s-3}dz}{1.2.3.[zz+b-\frac{1}{4}aa]^\delta} + \&c.$$

Or chacun des termes de cette suite finie a la même forme que la fraction $\frac{x^s dx}{[b+xx]^\delta}$, que nous venons d' integrer. On pourra donc construire facilement la troisieme table.

XLVI. Exemple. On demande la quadrature d' une courbe, dont les coordonnées perpendiculaires sont $x$ & $y$, & l' equation $y = \frac{[z^{\frac{1}{4}}+2] \times [z^{\frac{1}{4}}-2]}{[z^{\frac{1}{4}}+1] \times [z^{\frac{1}{2}}+1]^3}$.

On aura pour l' element de l' aire $y\,dz = \frac{[z^{\frac{1}{4}}+2]}{[z^{\frac{1}{4}}+1]} \times \frac{[z^{\frac{1}{4}}-2]dz}{[z^{\frac{1}{4}}+1]^3}$. Pour reduire les exposans en nombres entiers,

tiers, qu' on faſſe $z = x^4$, & l' on aura par la ſubſtitution

$$ydz = \frac{(x+2)\times(x-2)\times 4x^3dx}{(x+1)\times(x^2+1)^3} = \frac{(4x^6-8x^5-16x^4+32x^3).dx}{(x+1)\times(x^6+3x^4+3x^2+1)}.$$

Qu' on ſuppoſe $\frac{4x^6-8x^5-16x^4+32x^3}{(x+1)\times(x^2+1)^3} = \frac{A}{x+1}$

$$+\frac{Bx^5+Cx^4+Dx^3+Ex^2+Fx+G}{x^6+3x^4+3x^2+1}$$

$$= \frac{\begin{array}{ccccccc} Ax^6 & +Cx^5 & +3Ax^4 & +Ex^3 & +3Ax^2 & & +A \\ +B & +B & +D & +D & +F & +Gx & \\ & & +C & & +E & +F & +G \end{array}}{(x+1)\times[x^2+1]^3}.$$

Et en comparant termes a termes les numerateurs de ces deux fractions, on aura les equations ſuivantes. $A+B=4$. $C+B=-8$. $3A+D+C=-16$. $E+D=32$. $3A+E+F=0$. $G+F+0$. & $A+G=0$. Par les quelles on trouve $A=\frac{-9}{2}$. $B=\frac{17}{2}$. $C=\frac{-33}{2}$. $D=14$. $E=18$. $F=\frac{-9}{2}$. & $G=\frac{9}{2}$.

Donc $ydz = \frac{-\frac{9}{2}dx}{x+1} + \frac{\frac{17}{2}x^5dx}{[x^2+1]^3} - \frac{\frac{33}{2}x^4dx}{[x^2+1]^3} + \frac{14x^3dx}{[x^2+1]^3}$

$+\frac{18x^2dx}{[x^2+1]^3} - \frac{\frac{9}{2}xdx}{[x^2+1]^3} + \frac{\frac{9}{2}dx}{[x^2+1]^3}$.

Or S. $\frac{-\frac{9}{2}dx}{x+1} = \frac{-9}{2} . l. \overline{x+1}$.

S. $\frac{\frac{17}{2}x^5dx}{[xx+1]^3} = \frac{17}{4} . l.\overline{xx+1} + \frac{17}{2[xx+1]} \quad \frac{-17}{8[xx+1]^2}$.

S. $\frac{14x^3dx}{[xx+1]^3} = \frac{-7}{xx+1} + \frac{7}{2[xx+1]^2}$.

S. $\frac{-\frac{9}{2}xdx}{[xx+1]^3} = \frac{9}{8[xx+1]^2}$.

Et si l'on designe par $\mathcal{A}$ l'arc d'un cercle, dont la tangente soit $x$ ou $z^{\frac{1}{4}}$, & le rayon 1; les integrales des autres termes seront

S. $\frac{-\frac{33}{2}x^4dx}{(1+xx)^3} = \frac{-33x^5}{8(1+xx)^2} \quad \frac{+33x^5}{16(1+xx)}$

$\frac{-33x^3+99x-99\mathcal{A}}{16}$.

S. $\frac{18x^2dx}{[1+xx]^3} = \frac{9x^3}{2[1+xx]^2} \quad \frac{+9x^3}{4[1+xx]} \quad \frac{-9x+9\mathcal{A}}{4}$.

S. $\frac{\frac{9}{2}dx}{(1+xx)^3} = \frac{9x}{8(1+xx)^2} \quad \frac{+27x}{16(1+xx)} \quad \frac{+27\mathcal{A}}{16}$.

La somme de toutes ces integrales, c'est a dire, l'integrale

S. $ydz = \frac{17\ l.\overline{xx+1} - 18\ l.\overline{x+1}}{4} \quad \frac{-33x^5+36x^3+9x+20}{8[1+xx]^2}$ +

$$+ \frac{33x^5 + 36x^3 + 27x + 24}{16[1+xx]} \quad \frac{-33x^3 + 90x - 36\mathcal{A}}{16}$$

$$= \frac{51x^3 + 11x + 10}{4(1+xx)^2} + \frac{3x+3}{2(1+xx)} + \frac{27x}{16} +$$

$$\frac{17\ l.\overline{xx+1} - 18\ l.\overline{x+1}}{4} \quad \frac{-9\mathcal{A}}{4} = \frac{51z^{\frac{1}{4}} + 11z^{\frac{1}{4}} + 10}{4(1+z^{\frac{1}{2}})^2}$$

$$+ \frac{3z^{\frac{1}{4}} + 3}{2[1+z^{\frac{1}{2}}]} + \frac{27z^{\frac{1}{4}}}{16} + \frac{17\ l.\overline{z^{\frac{1}{2}}+1} - 18\ l.\overline{z^{\frac{1}{4}}+1}}{4}$$

$$\frac{-9\mathcal{A}}{4}.$$

Mais parceque l'aire $S.\,ydz$ doit s'evanouir, lorſque l'abſciſſe $z$ s'evanouit; il faut qu'en ſuppoſant $z = o$, toute cette integrale devienne auſſi egale a zero. Or en faiſant $z = o$, l'integrale devient $\frac{10}{4} + \frac{3}{2} = 4$. Donc il faut retrancher 4 de l'integrale trouvée; & ainſi on aura $S.\,ydz$

$$= \frac{51z^{\frac{1}{4}} + 11z^{\frac{1}{4}} + 10}{4[1+z^{\frac{1}{2}}]^2} + \frac{3z^{\frac{1}{4}} + 3}{2[1+z^{\frac{1}{2}}]} + \frac{27z^{\frac{1}{4}}}{16}$$

$$+ \frac{17\ l.\overline{z^{\frac{1}{2}}+1} - 18\ l.\overline{z^{\frac{1}{2}}+1}}{4} \quad \frac{-9\mathcal{A}}{4} - 4.$$

ADPRO-

# ADPROBATIO.

Reverendissimi Patris Magistri Sacri Palatii Apostolici jussu legi opusculum mole quidem exiguum, sed pretio maximum, cui titulus MEMOIRE SUR LE CALCUL INTEGRAL a celeberrimo Viro *P. Thoma Le Seur* conscriptum; in eo non solum nihil offendi, quod rectæ fidei aut bonis moribus adversetur, sed summum doctissimi Auctoris ingenium admiratus sum, atque intimam sublimissimæ analyseos cognitionem, quam brevi licet commentariolo plurimum promovet. Quamobrem dignissimum censeo, quod in publicam utilitatem typis mandetur.

*Rogerius Josephus Boscovich Soc. Jesu.*

---




## *ERRATA.*

Page 2, ligne penultieme, pour $\left(a+bz^{r}\right)^{\frac{\lambda s}{}}$, lisés $\left(a+bz^{l}\right)^{\frac{\lambda s}{}}$.

Page 8, ligne 23, pour $\frac{x^{3}\,dx}{R}$, lisés $\frac{x^{5}\,dx}{R}$.

Page 10, ligne 3, pour *ou*, lisés *on*.

Page 11, ligne 11, pour $\frac{x^{s}\,dx}{x^{2}+a}$, lisés $\frac{x^{s}\,dx}{x^{2}+a}$.

Même page, lignes 12, & 15, mêmes corrections.

Page 48, ligne premiere, pour $\frac{x^{2m+1}}{4b\,(b+xx)^{3}}$,

lisés $\frac{x^{2m+1}}{6b\,(b+xx)^{3}}$.